arXiv:1506.07258v1 [math.CO] 24 Jun 2015

О числе ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа

Ф. А. Пушняков

24.06.2015

Аннотация

В работе получены новые оценки числа ребер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа. Библиография: 21 название.

1 Введение

Рассмотрим последовательность графов $G_n = G_n(V_n, E_n) = G(n, 3, 1)$, у которых

$$V_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n\ ,\ x_1 + \ldots + x_n = 3\},$$

$$E_n = \{(x, y) \mid \langle x, y\rangle = 1\},$$

где через $\langle x, y\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов x и y. Иными словами, вершинами графа $G(n, 3, 1)$ являются $(0, 1)$-векторы, скалярный квадрат которых равен трем. И эти вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих веторов равно единице. Данное определение можно переформулировать в комбинаторных терминах. А именно, рассмотрим граф, вершинами которого являются всевозможные трехэлементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, причем ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие трехэлементные подмножества имеют ровно один общий элемент. Изучение данного графа обусловлено многими задачами комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики, теории кодирования: например, задачей Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о раскраске метрического пространства (см. [1]–[12]), проблемой Борсука о разбиении множеств в пространствах на части меньшего диаметра (см. [1]–[3], [13]–[15]), задачами о числах Рамсея (см. [16], [17]), задачами о кодах с одним запрещенным расстоянием (см. [18], [19]).

Напомним несколько свойств данного графа. Граф $G(n, 3, 1)$ является

$C_n^3 \sim \dfrac{n^3}{6}$ при $n \to \infty$. В силу регулярности рассматриваемого графа имеем $|E_n| = \frac{d_n \cdot |V_n|}{2} = \frac{3}{2} \cdot C_{n-3}^2 \cdot C_n^3 \sim \frac{n^5}{8}$ при $n \to \infty$.

Напомним, что *независимым множеством* графа называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества. Положим $\alpha_n = \alpha(G(n,3,1))$. Результат теоремы Ж. Надя (см. [17]) отвечает на вопрос о числе независимости графа $G(n,3,1)$. А именно, $\alpha_n \sim n$ при $n \to \infty$. Более того, из доказательства теоремы Ж. Надя можно сделать вывод о структуре независимого множества в рассматриваемом графе. Для описания этой структуры введем дополнительные обозначения. Пусть $W \subseteq V_n$. Будем говорить, что W является множеством вершин *первого типа*, если $|W| \geq 3$ и существуют такие $i, j \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $w \in W$ выполнено $i, j \in w$; далее, W является множеством вершин *второго типа*, если $|W| \geq 2$ и существуют такие $i,\ j,\ k,\ t \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $w \in W$ выполнено $w \subset \{i,j,k,t\}$; наконец, W является множеством вершин *третьего типа*, если для любых $w_1, w_2 \in W$ выполнено соотношение $w_1 \cap w_2 = \emptyset$. Более того, *носителем* множества вершин назовем объединение всех вершин данного множества. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1 *Любое независимое множество $U \subseteq V_n$ можно представить в виде объединения*

$$U = \left(\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cup \left(\cup_{j \in \mathcal{J}} B_j\right) \cup \left(\cup_{k \in \mathcal{K}} C_k\right),$$

где A_i – множество вершин первого типа, B_j – множество вершин второго типа, C_k – множество вершин третьего типа, $i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J},\ k \in \mathcal{K}$, и носители всех упомянутых множеств попарно не пересекаются.

Мы не доказываем данное утверждение, так как оно мгновенно следует из доказательства теоремы Ж. Надя (см. [17]).

Обозначим через $r(W)$ количество ребер графа G на множестве $W \subseteq V_n$. Иными словами,

$$r(W) = |\{(x,y) \in E(G) \mid x \in W,\ y \in W\}| .$$

Также положим

$$r(l(n)) = \min_{|W| = l(n),\ W \subseteq V_n} r(W) .$$

Заметим, что если $l(n) \leq \alpha_n$, то $r(l(n)) = 0$ и обсуждать нечего. Если же $l(n) > \alpha_n$, то, очевидно, в любом $W \subseteq V_n$ мощности $l(n)$ непременно найдутся ребра. Возникает интересный вопрос об изучении величины $r(l(n))$. В настоящей работе мы приведем практически полное исследование данной величины. Нами доказана следующая теорема.

1. *Пусть функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что выполнено $n = o(f)$ и $g = o(n^2)$ при $n \to \infty$. Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $f(n) \le l(n) \le g(n)$. Тогда $r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$.*

2. *Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что существуют константы C_1, C_2, с которыми для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $C_1 \cdot n^2 \le f(n) \le C_2 \cdot n^2$. Тогда $r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$.*

3. *Пусть функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что выполнено $n^2 = o(f(n))$ и $g(n) = o(n^3)$ при $n \to \infty$. Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f(n) \le l(n) \le g(n)$. Тогда существует такая функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h(n) \sim \frac{5l(n)^2}{\alpha_n}$ при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $\frac{l(n)^2}{\alpha_n} \le r(l(n)) \le h(n)$.*

4. *Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что существует константа C, с которой выполнена цепочка неравенств $C \cdot n^3 \le l(n) \le C_n^3$. Пусть $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. Тогда существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что $f(n) \sim n^5 \left(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4} + \frac{c_n^2}{72}\right)$ при $n \to \infty$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $r(l(n)) \ge f(n)$.*

Проанализируем формулировку данной теоремы. В первых двух случаях мы нашли асимптотическое значение величины $r(l)$ при $n \to \infty$. В третьем случае мы нашли порядок величины $r(l(n))$. Четвертый случай исследован не до конца, но оценка, полученная в нем, обладает тем свойством, что $r(l(n)) \sim |E_n|$ при $l(n) \sim |V_n|$ и $n \to \infty$. В следующем разделе мы приведем доказательство теоремы 1.

2 Доказательство теоремы 1

1 Доказательство пункта 1

Нижняя оценка известна и вытекает из классической теоремы Турана (см., например, [20], [21]). Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 1 теоремы, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. При этом можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 1 теоремы, и число n. Положим $a(n) = \left[\frac{n^2}{l(n)}\right]$. Положим $b(n) = [\ln a(n)]$. Положим $x(n) = n - \left[\frac{n}{b(n)}\right]$. Ясно, что $x(n) \sim n$ при $n \to \infty$. Также по-

$\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$:
$$A_1 = \{1, \ldots, x\}.$$

Рассмотрим также следующее множество вершин:

$$W_n = \bigcup_{i \in A_1} \bigcup_{j \in \{1, \ldots, \left[\frac{y}{2}\right]\}} \{\{x + 2(j-1) + 1, x + 2(j-1) + 2, i\}\}.$$

Найдем мощность множества W_n. Ясно, что

$$|W_n| = |A_1| \cdot \left[\frac{y}{2}\right] = x \cdot \left[\frac{y}{2}\right] \sim \frac{xy}{2}$$

при $n \to \infty$. Найдем $r(W_n)$. Обозначим через $E(W_n)$ множество ребер графа $G(n, 3, 1)$ на множестве вершин W_n. Иными словами, $E(W_n) = \{(a, b) \in E(G) |\ a \in W_n,\ b \in W_n\}$.

Посчитаем мощность множества $E(W_n)$. Ясно, что только вершины вида $\{x + 2(j-1) + 1, x + 2(j-1) + 2, i\}$ при фиксированном $i \in A_1$ могут образовывать ребро. Всего существует $\left[\frac{y}{2}\right] \cdot x \cdot (\left[\frac{y}{2}\right] - 1) \cdot \frac{1}{2}$ пар таких вершин. Действительно, $\left[\frac{y}{2}\right] \cdot x$ способами можно выбрать одну вершину из W_n, $(\left[\frac{y}{2}\right] - 1)$ способами можно выбрать ей пару из W_n, и, наконец, сомножитель $\frac{1}{2}$ показывает нам, что каждую пару вершин мы посчитали два раза.

Таким образом, $|E(W_n)| = \left[\frac{y}{2}\right] \cdot x \cdot (\left[\frac{y}{2}\right] - 1) \cdot \frac{1}{2}$. Подставим в полученное выражение значения параметров:

$$|E(W_n)| \sim \frac{xy^2}{8} = \frac{x^2 y^2}{8n} \cdot \frac{n}{x} \sim \frac{x^2 y^2}{8n} \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}.$$

Таким образом, искомая верхняя оценка получена.

2 Доказательство пункта 2

Нижняя оценка, как и в предыдущем пункте, известна и вытекает из классической теоремы Турана. Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 2 теоремы, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. По-прежнему можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 2 теоремы, и число n. Положим $c_n = 4 - \frac{1}{\ln n}, k = \left[\frac{n}{4}\right]$. Положим

$$W_1 = \bigcup_{i=3}^{[c_n k]} \{\{1,\ 2,\ i\}\},$$

$[c_n k]$ $\left[\frac{n-[c_n k]}{2}\right]$

Обозначим $W_n = W_1 \sqcup W_2$. Ясно, что

$$|W_n| = |W_1| + |W_2| = [c_n k] - 2 + ([c_n k] - 2)\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] \sim c_n k \frac{n - c_n k}{2} \sim$$

$$\sim c_n k \frac{(4 - c_n)k}{2} = \frac{c_n (4 - c_n) k^2}{2}.$$

Как и раньше, обозначим через $E(W_n)$ множество ребер графа $G(n, 3, 1)$ на множестве вершин W_n. Ясно, что

$$|E(W_n)| = ([c_n k]-2)\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] + \frac{1}{2}([c_n k]-2)\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right]\left(\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] - 1\right) \sim$$

$$\sim \frac{c_n (4 - c_n)^2 k^3}{8} = \frac{c_n^2 (4 - c_n)^2 k^4}{4} \frac{1}{2 c_n k} \sim \frac{|W_n|^2}{2\alpha_n}.$$

Таким образом, утверждение пункта 2 доказано.

3 Доказательство пункта 3

Нижняя оценка вытекает из аналога теоремы Турана для дистанционных графов (см., например, [20], [21]). Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 3 теоремы, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. По-прежнему можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 3 теоремы, и число n. Положим $k(n) = \left[\frac{l(n)}{\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{4}\right]}\right]$. Ясно, что $k(n) = o(n)$, при $n \to \infty$. Рассмотрим следующие подмножества множества $\mathcal{R}_n$:

$$A_1 = \begin{cases} \{1, \ldots, 2m\} & \text{при } n = 4m, \\ \{1, \ldots, 2m+1\} & \text{при } n = 4m+1, \\ \{1, \ldots, 2m+2\} & \text{при } n = 4m+2, \\ \{1, \ldots, 2m+3\} & \text{при } n = 4m+3, \end{cases}$$

$$A_2 = \mathcal{R}_n \setminus A_1.$$

Ясно, что $|A_1| \sim \frac{n}{2}$, $|A_2| \sim \frac{n}{2}$ при $n \to \infty$. Также ясно, что число $|A_2|$ четно. Положим $a(n) = |A_1|$. Пусть $\sigma \in S_{n-a(n)}$ – произвольная перестановка. Назовем разбиением множества A_2, отвечающем перестановке σ, следующее множество:

$$P_\sigma = \{(a(n) + \sigma(1),\ a(n) + \sigma(2)), \ldots, (a(n) + \sigma(n - a(n) - 1),\ a(n) + \sigma(n - a(n)))\}.$$

разбиению. Иными словами, можно выбрать $k(n)+1$ попарно не пересекающихся разбиений. Обозначим их $P_1, \dots, P_{k(n)+1}$. Тогда для $i = 1, \dots, k(n)+1$ положим

$$W^{(i)} = \bigcup_{x \in A_1,\ (y,z) \in P_i} \{\{x, y, z\}\}.$$

Пусть $w(n) = |W^{(1)}| = \ldots = |W^{(k(n)+1)}|$. Тогда ясно, что $w(n) = \frac{|A_1| \cdot |A_2|}{2} \sim \frac{n^2}{8}$ при $n \to \infty$. Более того, ясно, что $|E(W^{(i)})| = \frac{1}{2} \cdot (\left[\frac{n}{4}\right] - 1) \cdot w(n)$. Действительно, каждая из $w(n)$ вершин $W^{(i)}$ соединена ровно с $\left[\frac{n}{4}\right] - 1$ другими вершинами из $W^{(i)}$, а сомножитель $\frac{1}{2}$ показывает, что каждое ребро было посчитано два раза.

Выберем из множества $W^{(k(n)+1)}$ ровно $l(n) - k(n) \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{4}\right]$ вершин произвольным образом. Обозначим получившееся подмножество вершин через U. Ясно, что

$$|E(U)| \le \frac{1}{2} \cdot |U| \cdot \left(\left[\frac{n}{4}\right] - 1\right) \le \frac{n^3}{64}.$$

Положим

$$W_n = U \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k(n)} W^{(i)} \right).$$

Тогда

$$|W_n| = l(n) - k(n) \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{4}\right] + k(n) \cdot w(n) \sim l(n) \sim k(n) \frac{n^2}{8}$$

при $n \to \infty$. Посчитаем мощность множества $E(W_n)$. Обозначим

$$E_1 = \{(x, y) \in E(W_n) \mid \exists\, i \ne j,\ i, j \le k(n)\ : x \in W^{(i)},\ y \in W^{(j)}\},$$

$$E_2 = \{(x, y) \in E(W_n) \mid x \in U,\ y \in W_n \setminus U\}.$$

Тогда

$$|E(W_n)| = \sum_{i=1}^{k(n)} |E(W^{(i)})| + |E(U)| + |E_1| + |E_2|.$$

Найдем мощности множеств E_1 и E_2. Зафиксируем произвольную вершину $v \in W^{(1)}$. Обозначим

$$d_n = |\{y \in W_n \setminus \left(W^{(1)} \cup U\right)\ \mid (v, y) \in E(W_n)\}|.$$

Докажем, что $d_n = (k(n)-1)\left(\left[\frac{n}{4}\right] - 2 + 2 \cdot (|A_1| - 1)\right)$. Действительно, пусть $v = \{i, j, k\},\ i \in A_1,\ j, k \in A_2$. Рассмотрим произвольную вершину $u = \{x, y, z\} \in W_n \setminus \left(W^{(1)} \cup U\right)$, соединенную ребром с v. Тогда имеют место два случая:

1. $x = i$ и $|\{j, k\} \cap \{y, z\}| = 0$. Существует $(k(n) - 1)\left(\left[\frac{n}{4}\right] - 2\right)$ вершин u, удовлетворяющих данному условию. Действительно, $k(n) - 1$ способа

2. $x \neq i$ и $|\{j,k\} \cap \{y,z\}| = 1$. Существует $2 \cdot (k(n)-1) \cdot (|A_1|-1)$ вершин u, удовлетворяющих данному условию. Действительно, $k(n)-1$ способами можно выбрать такое натуральное t, что $u \in W^{(t)}$, еще двумя способами можно выбрать элемент, по которому пересекаются $\{j,k\}$ и $\{y,z\}$, и, наконец, $|A_1|-1$ способом можно выбрать элемент x.

Ясно, что $d_n \sim k(n)\frac{5n}{4}$ при $n \to \infty$. Тогда в силу регулярности подграфа графа $G(n,3,1)$, порожденного множеством вершин $W_n \setminus U$, имеем

$$|E_1| = \frac{1}{2} \cdot d_n \cdot |W_n \setminus U| \sim \frac{5k(n)^2 n^3}{64},$$

$$|E_2| \leq \frac{1}{2} \cdot d_n \cdot |U| \leq \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{4}\right] \cdot d_n \leq \frac{n^2}{16} \cdot k(n) \cdot \left(\left[\frac{n}{4}\right] - 2 + 2 \cdot (|A_1|-1)\right) \sim \frac{5k(n)n^3}{64}$$

при $n \to \infty$. Итого имеем

$$|E(W_n)| \sim \frac{k(n)n^3}{64} + \frac{5k(n)^2 n^3}{64} + |E(U)| + |E_2| \sim \frac{5k(n)^2 n^3}{64} \sim \frac{5l(n)^2}{\alpha_n}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, утверждение пункта 3 доказано.

4 Доказательство пункта 4

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 4 теоремы, и число n. Положим $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. Рассмотрим произвольное подмножество вершин $W \subseteq V_n$ мощности $l(n)$, положим $W_1 = V_n \setminus W$. Ясно, что $|W_1| = c_n C_n^3$. Обозначим через $E(W_1)$ множество ребер, концами которых являются вершины из W_1. Формально,

$$E(W_1) = \{(x,y) \in E_n \mid x, y \in W_1\}.$$

Обозначим через E_1 множество ребер, один конец которых принадлежит множеству W, а другой — множеству W_1:

$$E_1 = \{(x,y) \in E_n \mid x \in W,\ y \in W_1\}.$$

С учетом введенных обозначений мы имеем

$$E(W) = E_n \setminus (E(W_1) \sqcup E_1).$$

Тогда ясно, что

$$|E(W)| = |E_n| - |E(W_1)| - |E_1|.$$

Оценим сверху величину $|E(W_1)| + |E_1|$. В силу регулярности графа $G(n,3,1)$ имеем

$$|E(W_1)| + |E_1| \leq d_n \cdot |W_1|.$$

ребер, содержащих вершины из W_1. Данную оценку можно слегка уточнить. Заметим, что при таком подсчете дважды были посчитаны ребра из $E(W_1)$. Мощность данного множества можно оценить снизу с помощью теоремы Турана:

$$|E(W_1)| \geq \frac{|W_1|^2}{2\alpha_n}(1+o(1)).$$

Тогда

$$|E(W_1)| + |E_1| \leq d_n \cdot |W_1| - \frac{|W_1|^2}{2\alpha_n}(1+o(1)).$$

В итоге, суммируя все вышесказанное, имеем:

$$r(l(n)) \geq |E(W)| \geq \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3 - d_n \cdot |W_1| + \frac{|W_1|^2}{2\alpha_n}(1+o(1)) =$$

$$= \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot |W_1| + \frac{|W_1|^2}{2n}(1+o(1)) \sim$$

$$\sim \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot \left(\frac{c_n n^3}{6}\right) + \frac{1}{2n}\left(\frac{c_n n^3}{6}\right)^2 (1+o(1)) \sim$$

$$\sim n^5 \left(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4} + \frac{c_n^2}{72}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Список литературы

[1] A.M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, “Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics”, AMS, Contemporary Mathematics, 625 (2014), 93 - 109.

[2] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429 - 460.

[3] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи матем. наук, 56 (2001), вып. 1, 107 - 146.

[4] А.М. Райгородский, *О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах*, Доклады РАН, 432 (2010), N2, 174 - 177.

[5] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of spheres in* $\mathbb{R}^n$, Combinbatorica, 32 (2012), N1, 111 - 123.

[6] J. Balogh, A.V. Kostochka, A.M. Raigorodskii, *Coloring some finite sets in* $\mathbb{R}^n$, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 33 (2013), N1, 25 - 31.

[7] Л.И. Боголюбский, А.С. Гусев, М.М. Пядёркин, А.М. Райгородский, *Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов*, Доклады РАН, 457 (2014), N4, 383 - 387.

[8] Л.И. Боголюбский, А.С. Гусев, М.М. Пядёркин, А.М. Райгородский, *Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов*, Матем. сборник, 2015.

[9] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.

[10] L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649 - 666.

[11] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.

[12] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Math. Association of America, 1991.

[13] V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.

[14] A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 347 (2007), 202 - 248.

[15] А.М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Итоги науки и техники. Серия "Современная математика", 23 (2007), 147 - 164.

[16] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory*, John Wily and Sons, NY, Second Edition, 1990.

[17] Z. Nagy, *A certain constructive estimate of the Ramsey number*, Matematikai Lapok, 23 (1972), N 301-302, 26.

[18] Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж.А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, М.: Радио и связь, 1979.

[19] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, *Codes with forbidden distances*, Discrete Mathematics, 213 (2000), 3 - 11.

[20] Е.Е. Демёхин, А.М. Райгородский, О.И. Рубанов, *Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера*, Матем. сборник, 204 (2013), N4, 49 - 78.

[21] А.М. Райгородский, К.А. Михайлов, *О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в* $\{0,1\}^n$, Матем. сборник, 200